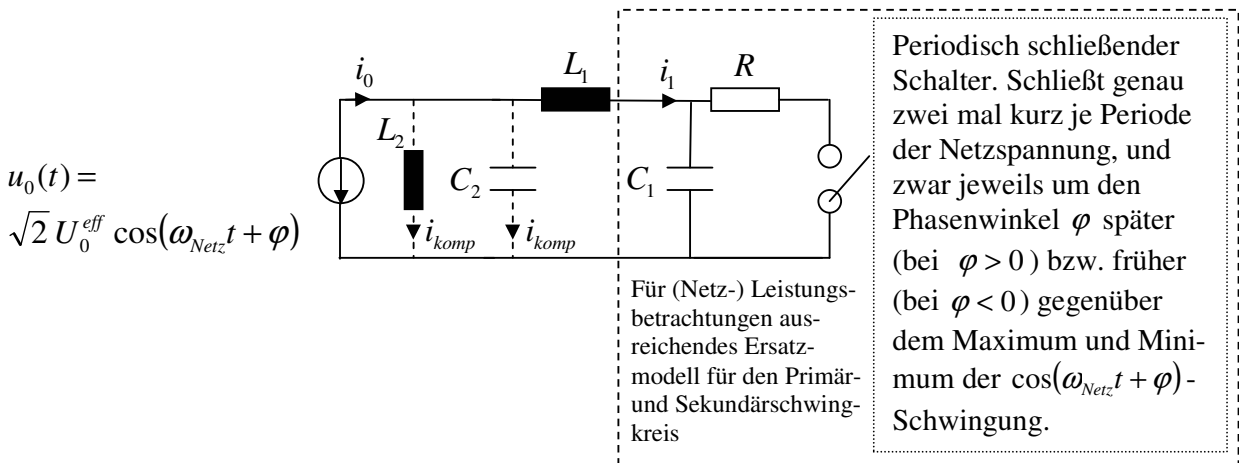


## Induktive Strombegrenzung für AC-gespeiste SGTC mit netzsynchroner rotierender Funkenstrecke

Es wird von einer SGTC ausgegangen, welche mit einer 50 Hz-netzfrequenz-synchron rotierenden primären Funkenstrecke ausgestattet ist. Hier wird speziell von der Annahme ausgegangen, dass die rotierende Funkenstrecke genau zweimal je Netzperiode zündet.

Wenn man sich nur für die niederfrequenten Ströme und Spannungen sowie die Wirk- und Scheinleistung einer SGTC interessiert, kann man so tun, als ob der Kondensator des Primärschwingkreises nach dem Zünden der Funkenstrecke über einen niederohmigen Widerstand entladen würde. Die Sekundärspule entfällt. Falls der Primärschwingkreis jedoch so angeordnet ist, dass der Primärkondensator sowie die Reihenschaltung aus der Funkenstrecke und der Primärspule jeweils parallel zur Stromversorgung geschaltet sind, wird vorausgesetzt, dass, falls kein Blindstromkompensationskondensator parallel zur Netzspannungsquelle geschaltet ist, statt dessen ein Kondensator mit kleinerer Kapazität verwendet wird, welcher Ströme mit Frequenzen in der Größenordnung der Frequenz des Primärschwingkreises ausfiltern und somit vom Netz fernhalten kann.

Da man den HV Trafo bei Vernachlässigung der Kupferwiderstände aus der Sicht der Sekundärseite ersatzweise als Hintereinanderschaltung einer idealen Spannungsquelle und einer Induktivität darstellen kann, wird nun folgendes vereinfachtes Modell verwendet.



Einerseits soll der Schalter immer nur sehr kurz im Verhältnis zur Periodendauer  $2\pi/\omega_{Netz}$  der Netzspannung schließen, und andererseits soll der Lastwiderstand  $R$  so niederohmig sein, dass der Kondensator  $C_1$  zu den Zeitpunkten, an denen der Schalter jeweils wieder öffnet, nahezu vollständig entladen ist. Die Schließ-Zeitpunkte des Schalters sind  $k\pi/\omega_{Netz}$  ( $k$  ganzzahlig).

Es soll einerseits berechnet werden, welcher Strom im Netz fließt und welche Wirk- und Scheinleistungen dem Netz entnommen werden. Wenn man andererseits eine Blindstromkompensation durchführen möchte, müssen je nach Phasenlage des Blindstroms entweder ein Kondensator  $C_2$  oder eine Induktivität  $L_2$  parallel zum Netz hinzugeschaltet werden. Es werden optimale Werte für  $C_2$  bzw.  $L_2$  angegeben.

Die im Folgenden angegebenen Ströme, Spannungen und Leistungen beziehen sich auf den stationären (eingeschwungenen) Zustand, der erst einige Zeit nach dem Einschalten des Systems auftritt. Erst später wird auch der Einschwingvorgang betrachtet.

Es wird folgende Abkürzung verwendet (wobei  $\omega_{\text{Netz}} = 2\pi f_{\text{Netz}} = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$  die Netzkreisfrequenz ist):

$$z = \omega_{\text{Netz}} \sqrt{L_1 C_1} = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \sqrt{L_1 C_1}$$

Falls  $z^2 - 1 - \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi > 0$  ist, muss zur Blindstromkompensation ein Kondensator  $C_2$  verwendet werden, dessen optimaler Wert bei

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{z^2 - 1 - \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi}{|z^2 - 1|^2}$$

liegt (und  $L_2$  entfällt). Falls aber  $z^2 - 1 - \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi < 0$  ist, muss statt dessen eine Induktivität  $L_2$  mit dem optimalen Wert

$$L_2 = L_1 \cdot \frac{|z^2 - 1|^2}{-z^2 \left( z^2 - 1 - \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi \right)}$$

verwendet werden. In beiden Fällen fließt ein Kompensationsstrom mit dem Effektivwert

$$i_{\text{komp}}^{\text{eff}} = \frac{U_0^{\text{eff}}}{\omega_{\text{Netz}} L_1} \cdot \frac{z^2 \left| z^2 - 1 - \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi \right|}{|z^2 - 1|^2},$$

und der Effektivwert  $i_0^{\text{komp,eff}}$  des Stroms, der durch die Quelle fließt, ergibt sich durch

$$i_0^{\text{komp,eff}} = \frac{U_0^{\text{eff}}}{\omega_{\text{Netz}} L_1} \cdot \frac{z \left| \cos \varphi \sqrt{2 \left( 1 - \frac{z}{\pi} \sin \left( \frac{\pi}{z} \right) \right)} + \frac{8z^2}{\pi^2 |z^2 - 1|^2} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{z} \right) (\cos 2\varphi - 1) \right|}{|z^2 - 1| \sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{z}}}.$$

Der Effektivwert  $i_1^{\text{eff}}$  des Stroms durch die Induktivität  $L_1$  beträgt

$$i_1^{\text{eff}} = \sqrt{\left( i_0^{\text{Komp,eff}} \right)^2 + \left( i_{\text{komp}}^{\text{eff}} \right)^2}$$

Die Wirkleistung, die die Quelle abgibt und am Widerstand R verbraucht wird, ergibt sich zu

$$P_{\text{wirk}} = \frac{4 \left( U_0^{\text{eff}} \right)^2}{\pi \omega_{\text{Netz}} L_1} \cdot \frac{z^2 (\cos \varphi)^2}{|z^2 - 1|^2}$$

Die Scheinleistung  $P_{\text{schein}}$  der Quelle ergibt sich zu  $U_0^{\text{eff}} i_0^{\text{komp,eff}}$ .

Die Kondensatorspannung  $U_{C1}^{\text{zünd}}$  kurz vor dem Zünden hängt mit der Wirkleistung  $P_{\text{wirk}}$

gemäß  $P_{\text{wirk}} = 2 \cdot \frac{\omega_{\text{Netz}}}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} C_1 \left( U_{C1}^{\text{zünd}} \right)^2$  zusammen; somit gilt:

$$\left| U_{C1}^{\text{zünd}} \right| = \frac{2\sqrt{2} U_0^{\text{eff}} \cos \varphi}{|z^2 - 1|}$$

Der maximale Betrag der Kondensatorspannung  $|U_{C1}^{\max}|$ , der zu irgendeinem Zeitpunkt innerhalb einer Netzperiode auftritt, kann größer als  $|U_{C1}^{zind}|$  sein. Es konnte keine Formel, sondern lediglich eine obere Schranke für die maximale Spannung hergeleitet werden:

$$|U_{C1}^{\max}| \leq \frac{\sqrt{2} U_0^{eff}}{|z^2 - 1|} \left( 1 + \left| \frac{\cos \varphi}{\cos \frac{\pi}{2z}} \right| \right)$$

Diese obere Schranke gilt nur für den eingeschwingenen (stationären) Zustand. Für den nach dem Einschalten auftretenden Einschwingvorgang können möglicherweise vorübergehend größere Spannungen auftreten.

Falls man keine Blindstromkompensation vornimmt ( $C_2$  und  $L_2$  entfernt), bleiben  $i_1^{eff}$  und  $P_{wirk}$  unverändert, aber der Strom  $i_0$  durch die Quelle wird gleich wie  $i_1^{eff}$ .

Der zeitliche Verlauf des Stroms  $i_1$  innerhalb einer halben Netzperiode ist wie folgt, wenn man eine Netzspannung  $u_0(t) = \sqrt{2} U_0^{eff} \cos(\omega_{Netz} t + \varphi)$  und die Schalter-Schließzeitpunkte  $k\pi/\omega_{Netz}$  ( $k$  ganzzahlig) voraussetzt. Der Strom  $i_1$  wird hier mit  $i_1^{stat}$  benannt, um deutlich zu machen, dass es sich um die stationäre Lösung nach Abklingen von nach dem Einschalten auftretenden Einschwingvorgängen handelt.

$$i_1^{stat}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2} U_0^{eff}}{\omega_{Netz} L_1} \cdot \frac{z}{z^2 - 1} \cdot \left( z \sin(\omega_{Netz} t + \varphi) - \frac{\cos \varphi}{\cos \frac{\pi}{2z}} \sin \left( \frac{\omega_{Netz} t - \frac{\pi}{2}}{z} \right) \right) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_{Netz}} \\ -i_1^{stat} \left( t - \frac{\pi}{\omega_{Netz}} \right) & \text{falls } \frac{\pi}{\omega_{Netz}} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_{Netz}} \\ i_1^{stat} \left( t \pm \frac{2\pi}{\omega_{Netz}} \right) & \text{falls } t \text{ beliebig} \end{array} \right.$$

Eine halbe Periode später hat  $i_1^{stat}(t)$  ein umgedrehtes Vorzeichen:  $i_1^{stat}(t) = -i_1^{stat} \left( t - \frac{\pi}{\omega_{Netz}} \right)$ .

Für  $t \geq \frac{2\pi}{\omega_{Netz}}$  wiederholt sich  $i_1^{stat}(t)$  periodisch:  $i_1^{stat}(t) = i_1^{stat} \left( t - \frac{2\pi}{\omega_{Netz}} \right)$ .

Die Korrektheit der ersten Formel kann man überprüfen, indem man die Maschengleichung  $u_0(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1^{stat}(\tau) d\tau$  (der Kondensator  $C_1$  ist bei  $t=0$  ungeladen) und außerdem die Stetigkeitsbedingung  $i_1^{stat}(\pi/\omega) = -i_1^{stat}(0)$  überprüft.

Es wird darauf hingewiesen, dass alle bisher angegebenen Ströme (der zeitliche Verlauf und die Effektivwerte) und Leistungen unter der Voraussetzung berechnet wurden, dass sie periodisch mit der Netzfrequenz sind. Nach dem Einschalten treten jedoch zunächst nicht-periodische Verläufe von Strom und Spannungen auf. Nach einer gewissen Zeit gehen sie jedoch zunehmend genauer in einen periodischen Verlauf über. Im Folgenden wird der Verlauf des Stroms  $i_1$  ab dem Moment des Einschaltens angegeben. Die Netzspannung wird wie bisher zu  $u_0(t) = \sqrt{2} U_0^{eff} \cos(\omega_{Netz} t + \varphi)$  und die Schalter-Schließpunkte zu  $k\pi/\omega_{Netz}$  ( $k$  ganzzahlig) angenommen. Man denke sich nun in Reihe zur Spannungsquelle noch einen Schalter, der das ganze System zum Zeitpunkt  $T_{ein}$  einschaltet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass  $0 \leq T_{ein} \leq 2\pi/\omega_{Netz}$  gilt.

Zunächst wird eine Hilfsfunktion  $F$ , die von zwei Parametern  $\alpha$  und  $t$  abhängt, definiert:

$$F(\alpha, t) := \begin{cases} \frac{\sqrt{2} U_0^{eff}}{\omega_{Netz} L_1} \cdot \frac{z}{z^2 - 1} \cdot \left( z \sin(\omega_{Netz} t + \alpha) - z \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\omega_{Netz} t}{z}\right) - \cos(\alpha) \sin\left(\frac{\omega_{Netz} t}{z}\right) \right) & \text{falls } z \neq 1 \\ \frac{U_0^{eff}}{\sqrt{2} \omega_{Netz} L_1} (\omega_{Netz} t \cos(\omega_{Netz} t + \alpha) - \cos(\alpha) \sin(\omega_{Netz} t)) & \text{falls } z = 1 \end{cases}$$

Weiter wird die Funktion floor wie in der Programmiersprache C verwendet, d.h. floor( $x$ ) ist die größte ganze Zahl, die nicht größer als  $x$  ist. Der Verlauf des Stroms  $i_1$  wird nun angegeben. Falls der untere der vier möglichen Fälle eintritt ( $0 \leq T_{ein} \leq 2\pi/\omega_{Netz} \leq t$ ), ruft sich die Funktion  $i_1$  rekursiv selbst auf ( $i_1(2\pi/\omega_{Netz})$ ). Man kann die Rekursion jedoch leicht auflösen, indem man  $i_1(2\pi/\omega_{Netz})$  je nach  $T_{Ein}$  auf den zweiten oder dritten Fall zurückführt. Außerdem ruft  $i_1$  die oben definierte Funktion  $i_1^{stat}$  auf, welche den Strom für den eingeschwungenen (stationären) Fall wiedergibt.

$$i_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq T_{ein} \\ F(\varphi + T_{ein} \omega_{Netz}, t - T_{ein}) & \text{falls } 0 \leq T_{ein} \leq t \leq \pi/\omega_{Netz} \quad \text{und beliebiges } z > 0 \\ \text{oder } \pi/\omega_{Netz} \leq T_{ein} \leq t \leq 2\pi/\omega_{Netz} \quad \text{und beliebiges } z > 0 \\ F\left(\varphi + T_{ein} \omega_{Netz}, \frac{\pi}{\omega_{Netz}} - T_{ein}\right) \cdot \left(\cos \frac{\omega_{Netz} t - \pi}{z}\right) + F\left(\varphi + \pi, t - \frac{\pi}{\omega_{Netz}}\right) & \text{falls } 0 \leq T_{ein} \leq \pi/\omega_{Netz} \leq t \leq 2\pi/\omega_{Netz} \quad \text{und beliebiges } z > 0 \\ i_1^{stat}(t) + \left(\cos \frac{\pi}{z}\right)^{\text{floor}\left(\frac{t}{\pi/\omega_{Netz}}\right) - 2} \cos\left(\frac{\omega_{Netz}}{z} \left(t - \frac{\pi}{\omega_{Netz}} \text{floor}\left(\frac{t}{\pi/\omega_{Netz}}\right)\right)\right) \cdot \left(i_1\left(\frac{2\pi}{\omega_{Netz}}\right) + \frac{F\left(\varphi, \frac{\pi}{\omega_{Netz}}\right)}{1 + \cos \frac{\pi}{z}}\right) & \text{falls } 0 \leq T_{ein} \leq 2\pi/\omega_{Netz} \leq t \quad \text{und } z > 0 \quad \text{und } \cos(\pi/z) \neq -1 \end{cases}$$

Anhand der Gleichung für  $i_1(t)$  im vierten Fall ( $t \geq 2\pi/\omega_{\text{Netz}}$ ) erkennt man, dass der Unterschied von  $i_1(t)$  zur stationären Lösung  $i_1^{\text{stat}}(t)$  aufgrund des Terms  $\left(\cos\frac{\pi}{z}\right)^{\text{floor}\left(\frac{t}{\pi/\omega_{\text{Netz}}}\right)-2}$  jede halbe Netzperiode mit dem Faktor  $\cos(\pi/z)$  multipliziert wird und somit betragsmäßig kleiner wird, falls  $|\cos(\pi/z)| < 1$  ist.

Falls aber  $\cos(\pi/z) = -1$  ist, kann obige Gleichung für  $i_1(t)$  im Fall  $t > 2\pi/\omega_{\text{Netz}}$  nicht angewandt werden. Diese Spezialfälle werden nun abgehandelt. Es wird wieder rekursiv  $i_1(2\pi/\omega_{\text{Netz}})$  aufgerufen, welches mit der vorher genannten Darstellung von  $i_1(t)$  berechnet werden kann.

$$i_1(t) = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{U_0^{\text{eff}} \cos \varphi}{\sqrt{2} \omega_{\text{Netz}} L_1} \omega_{\text{Netz}} \left( t - \frac{2\pi}{\omega_{\text{Netz}}} \right) + i_1 \left( \frac{2\pi}{\omega_{\text{Netz}}} \right) \right) \cos(\omega_{\text{Netz}} t) \\ + \frac{U_0^{\text{eff}}}{\sqrt{2} \omega_{\text{Netz}} L_1} \left( \cos \varphi - \omega_{\text{Netz}} \left( t - \frac{\pi}{\omega_{\text{Netz}}} \text{floor} \left( \frac{t}{\pi/\omega_{\text{Netz}}} \right) \right) \sin \varphi \right) \sin(\omega_{\text{Netz}} t) \\ \text{falls } 0 \leq T_{\text{ein}} \leq 2\pi/\omega_{\text{Netz}} \leq t \text{ und } \cos(\pi/z) = -1 \text{ und } z = 1 \\ \hline (-1)^{\text{floor}\left(\frac{t}{\pi/\omega_{\text{Netz}}}\right)} \cdot \left( F \left( \varphi, t - \frac{\pi}{\omega_{\text{Netz}}} \text{floor} \left( \frac{t}{\pi/\omega_{\text{Netz}}} \right) \right) + \cos \left( \frac{\omega_{\text{Netz}}}{z} \left( t - \frac{\pi}{\omega_{\text{Netz}}} \text{floor} \left( \frac{t}{\pi/\omega_{\text{Netz}}} \right) \right) \right) \right) \cdot i_1 \left( \frac{2\pi}{\omega_{\text{Netz}}} \right) \\ \text{falls } 0 \leq T_{\text{ein}} \leq 2\pi/\omega_{\text{Netz}} \leq t \text{ und } \cos(\pi/z) = -1, \text{ aber } z \neq 1 \end{array} \right.$$

Falls  $\cos(\pi/z) = -1$  und  $z = 1$  gilt (Resonanzfall), ist  $\frac{U_0^{\text{eff}} \cos \varphi}{\sqrt{2} \omega_{\text{Netz}} L_1} \omega_{\text{Netz}} t \cos(\omega_{\text{Netz}} t)$  für zunehmende  $t$  der dominierende (Teil-)Summand für  $i_1(t)$ , d.h. die Amplitude der Schwingung steigt linear mit  $t$ .

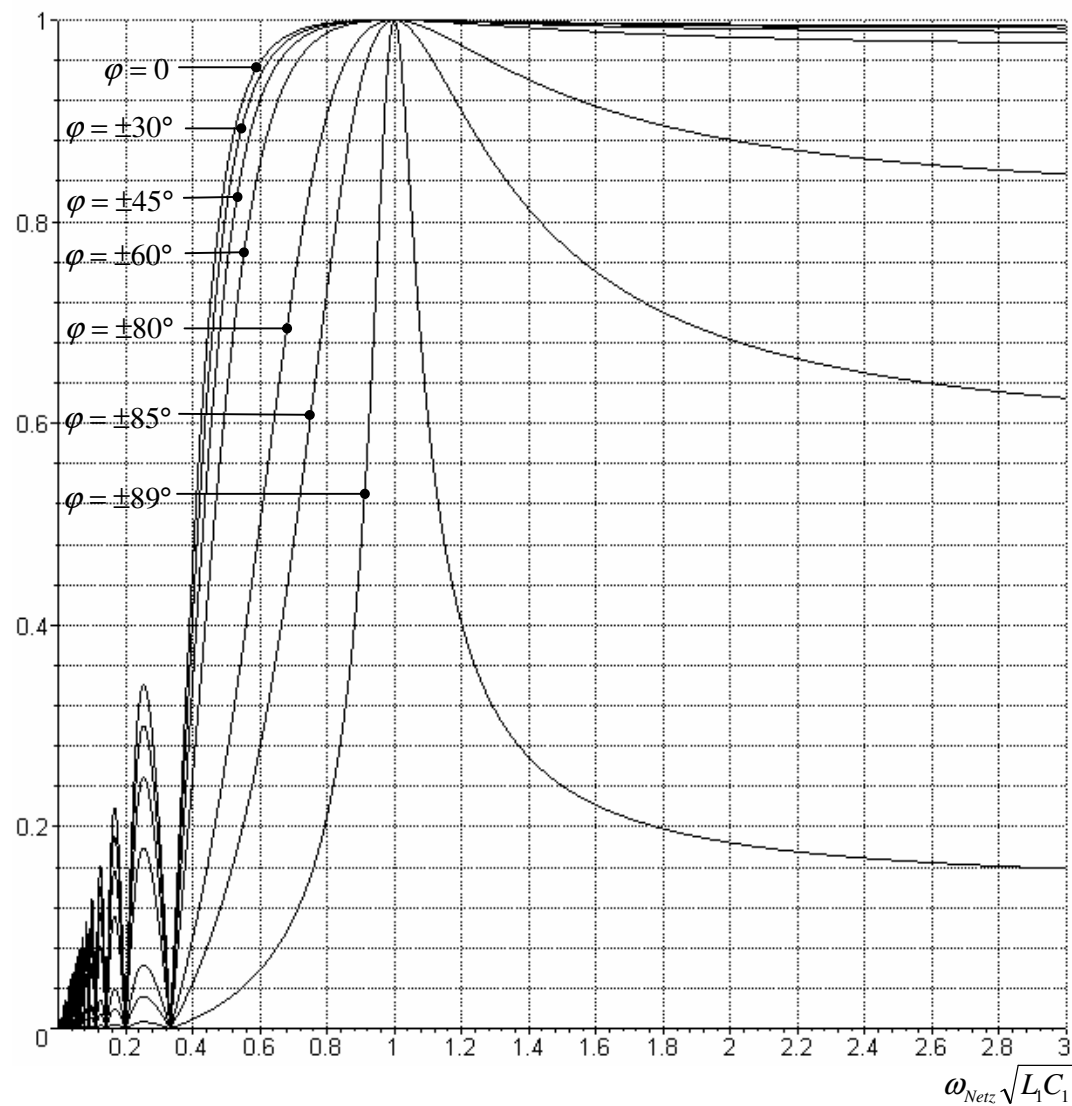
Falls aber  $\cos(\pi/z) = -1$  und  $z \neq 1$  gilt, steigt die Amplitude der Schwingung für zunehmende  $t$  gar nicht an, obwohl die stationäre Lösung  $i_1^{\text{stat}}(t)$  im Grenzfall  $z \neq 1$ ,  $\cos(\pi/z) \rightarrow -1$  unendlich groß wäre (denn dann nähert sich der in einem Nenner von  $i_1^{\text{stat}}(t)$  stehende Term  $\cos\frac{\pi}{2z}$  dem Wert Null an). In diesem Fall wird nämlich der „Einschwingvorgang“ nie beendet, und es tritt keine Annäherung an die stationäre Lösung  $i_1^{\text{stat}}(t)$  auf. Falls  $z \neq 1$  und  $\cos(\pi/z)$  nahe, aber nicht genau bei  $-1$  liegt, steigt der Strom  $i_1(t)$  nach dem Einschalten langsam auf einen hohen Wert an. Dieser Fall ist jedoch für die Praxis vollkommen uninteressant, weil dann nämlich selbst bei optimaler, durch einen Kondensator oder eine Induktivität erreichbarer Blindstromkompensation, das Verhältnis aus Wirk- zu Scheinleistung der Quelle gegen Null geht.

Im Folgenden wird wieder nur der eingeschwungene Zustand betrachtet. Es werden  $\frac{P_{\text{wirk}}}{P_{\text{schein}}}$

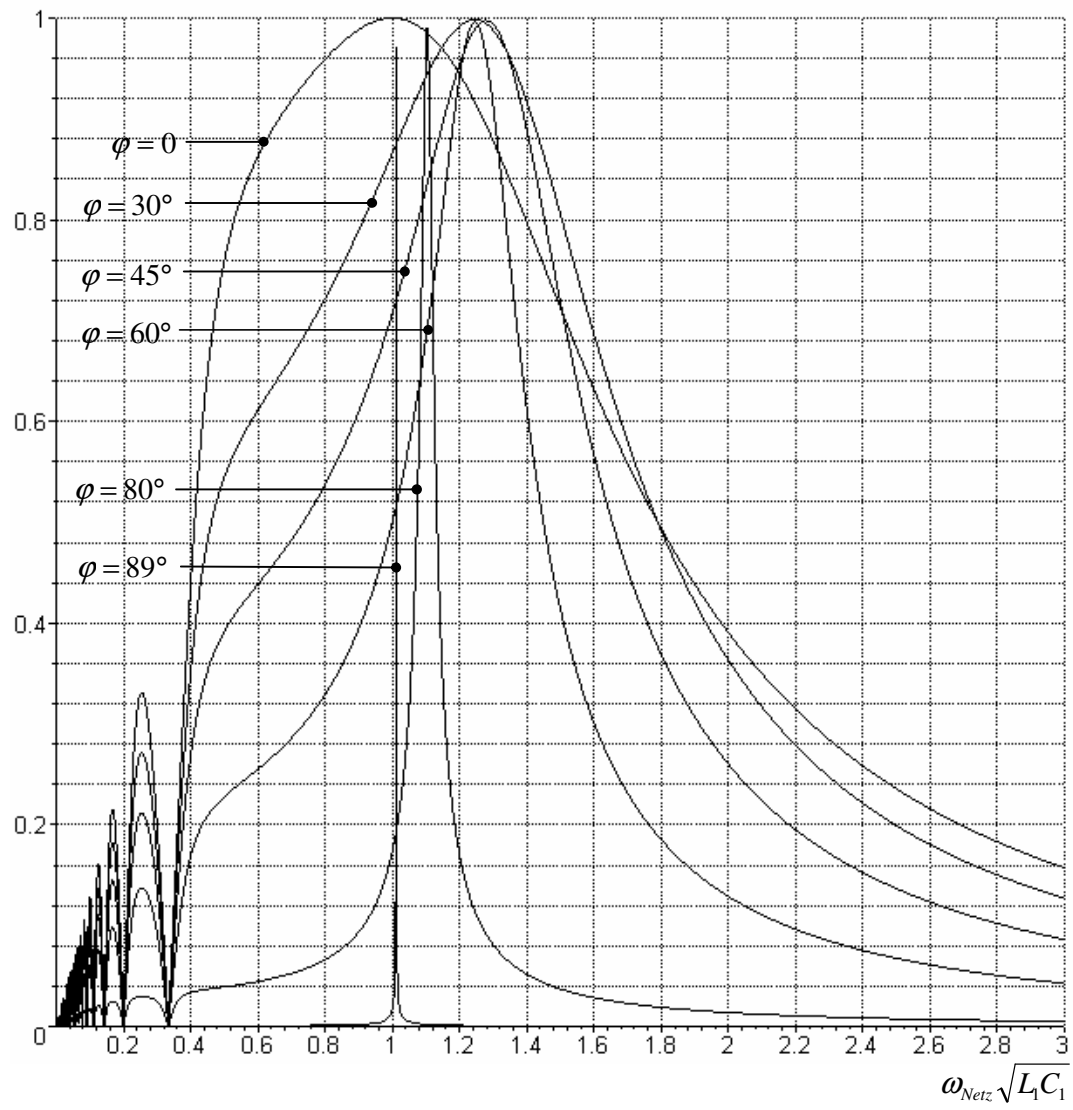
mit und ohne Blindstromkompensation,  $\frac{i_1^{\text{eff}}}{U_0^{\text{eff}} / (\omega_{\text{Netz}} L_1)}$ ,  $\frac{i_0^{\text{komp.eff}}}{U_0^{\text{eff}} / (\omega_{\text{Netz}} L_1)}$  sowie das Verhältnis

$\frac{U_{C1}^{\text{zünd}}}{U_0^{\text{max}}}$  aus Kondensatorspannung kurz vor dem Zünden zum Spitzenwert der Quellspannung grafisch dargestellt.

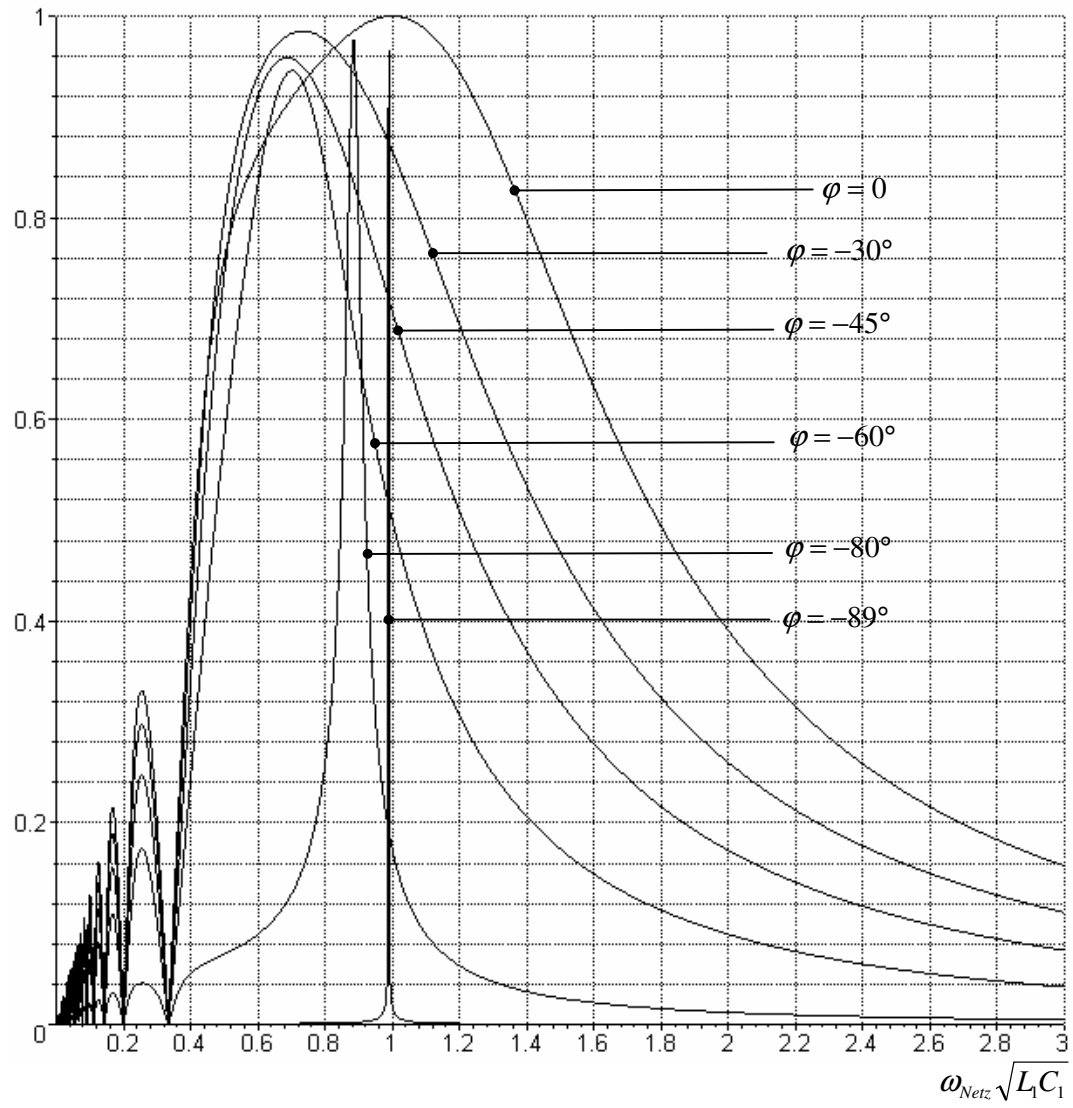
$\frac{P_{\text{wirk}}}{P_{\text{schein}}}$  mit Blindstromkompensation



$\frac{P_{\text{wirk}}}{P_{\text{schein}}}$  ohne Blindstromkompensation

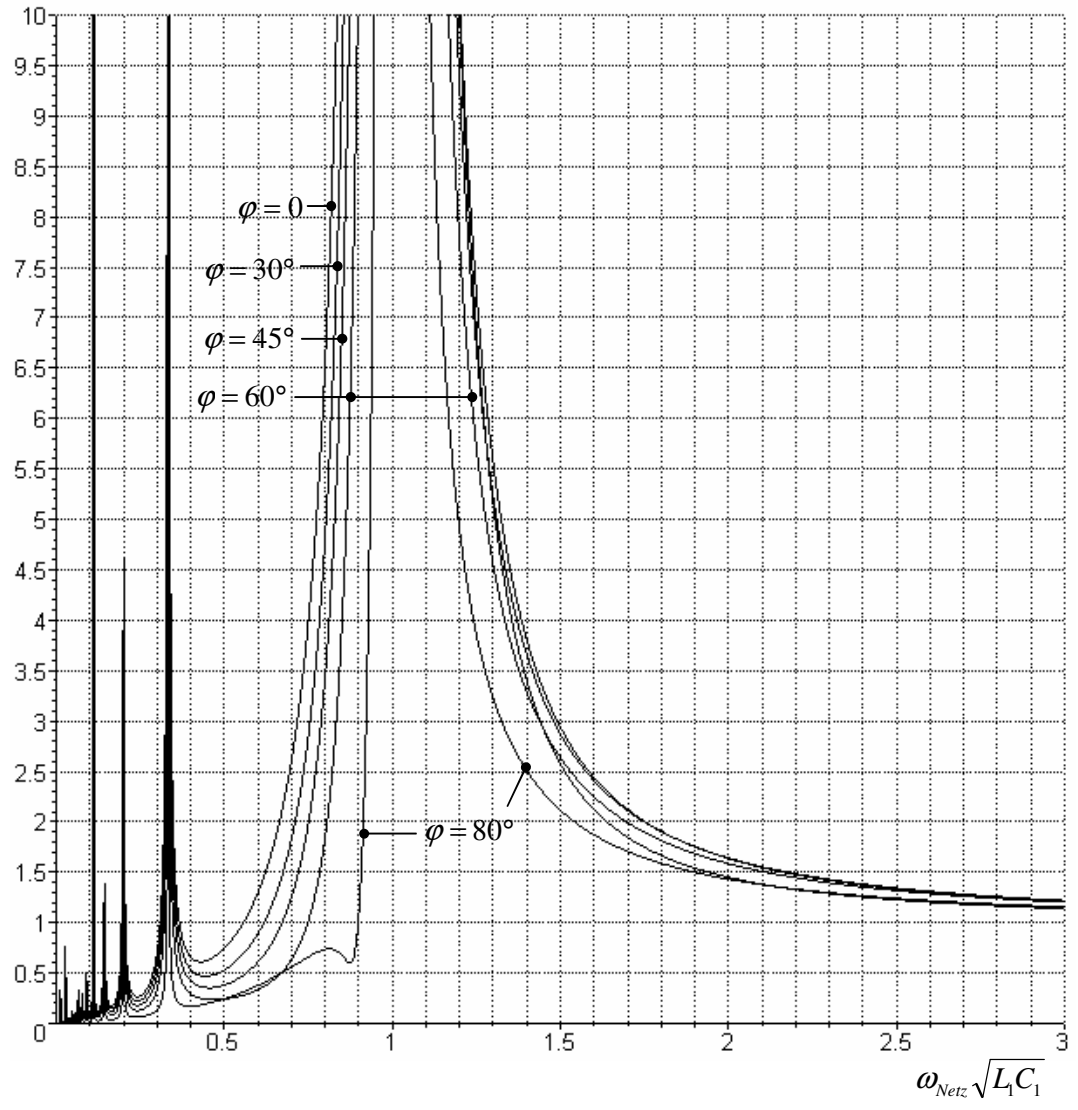


$\frac{P_{\text{wirk}}}{P_{\text{schein}}}$  ohne Blindstromkompensation

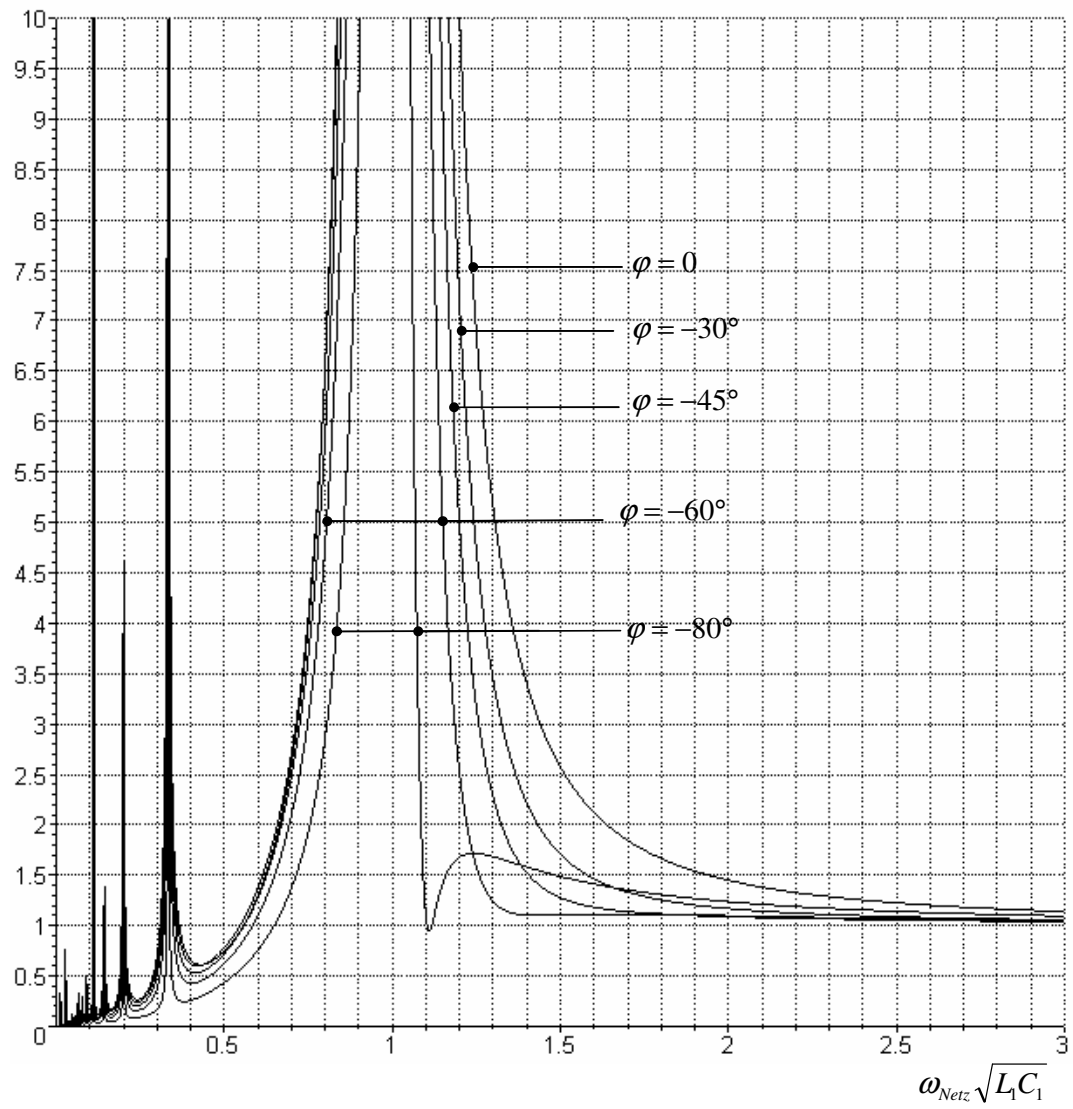




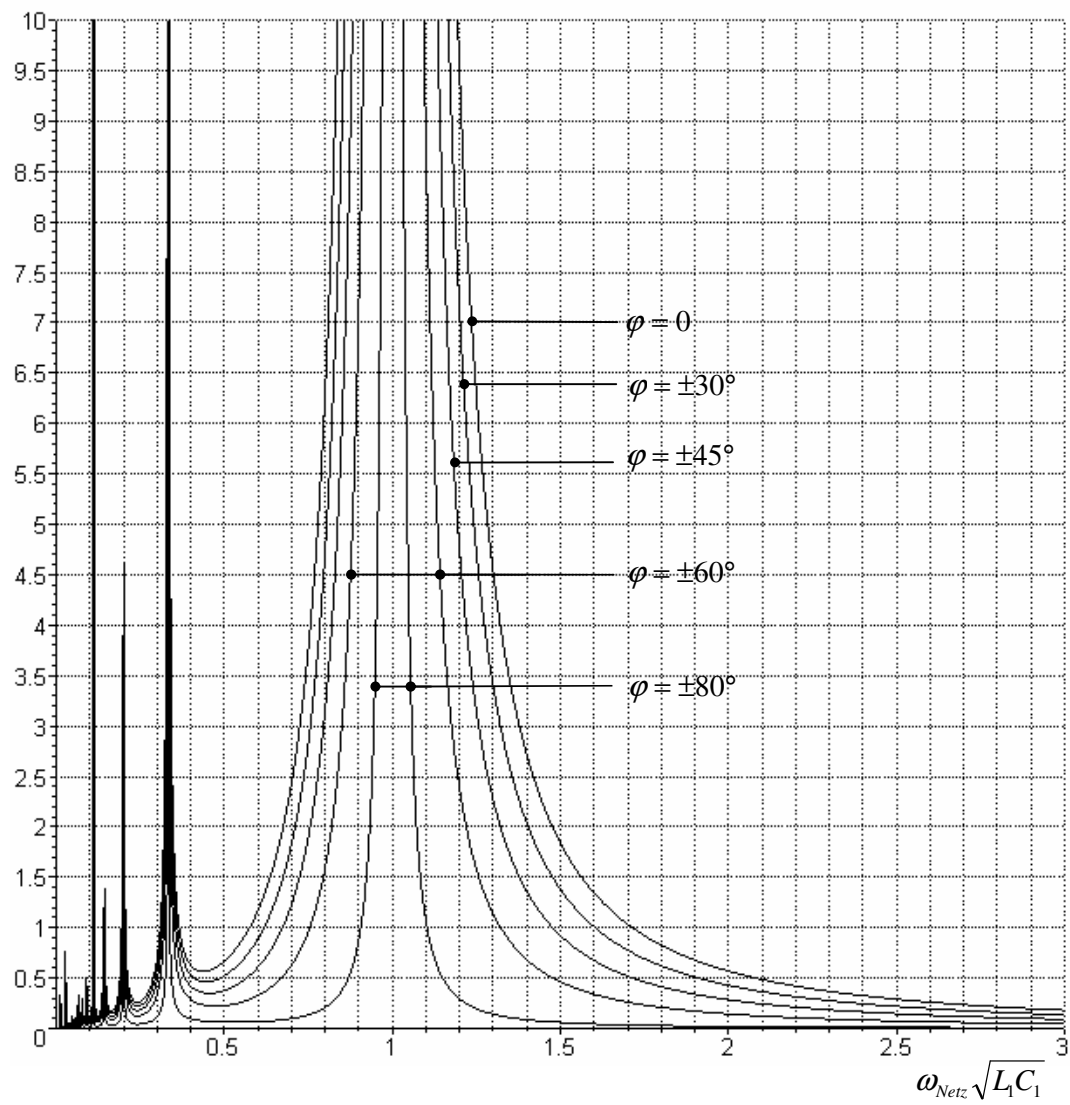
$$\frac{i_1^{eff}}{U_0^{eff} / (\omega_{Netz} L_1)}$$



$$\frac{i_1^{eff}}{U_0^{eff} / (\omega_{Netz} L_1)}$$



$$\frac{i_0^{komp.eff}}{U_0^{eff} / (\omega_{Netz} L_1)} \quad \text{mit Blindstromkompensation}$$



Die Spannung des Kondensators  $C_1$  kurz vor dem Schließen des Schalters bzw. Zündens der Funkenstrecke sei  $U_{C_1}^{z\u00fcnd}$ , und der Maximalwert der sinusf\u00f6rmigen Quellenspannung ist  $U_0^{\max} = \sqrt{2}U_0^{\text{eff}}$ . Das Verh\u00e4ltnis  $U_{C_1}^{z\u00fcnd}/U_0^{\max}$  wird im Folgenden dargestellt. Man beachte, dass  $U_{C_1}^{z\u00fcnd}$  kleiner als die maximale Spannung sein kann, auf die der Kondensator innerhalb einer Netzfrequenz-Periode aufgeladen wird.

$$\frac{U_{C_1}^{z\u00fcnd}}{U_0^{\max}}$$

